AVRIL 2017

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

Corrigé de la $1^{\text{ère}}$ COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Le sujet est constitué de deux problèmes indépendants. Tout résultat donné dans l'énoncé pourra être admis dans les questions suivantes. Le plus grand soin sera apporté à la rédaction et à la présentation des résultats.

1 Problème 1

Dans tout le problème, on note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels $\{0, 1, 2, \ldots\}$, $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels, et $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes. On note F la fonction de $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$\forall (x, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}, \quad F(x, z) = \exp\left(-zx - \frac{x^2}{2}\right)$$

et f la fonction de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = F(x, 0) = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

Rappel : Si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont deux séries de nombres complexes absolument convergentes, alors la série de terme général $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ $(n \in \mathbb{N})$ est absolument convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\right)\left(\sum_{\ell=0}^{+\infty} b_\ell\right)$$

Partie 1

1. Soit $z \in \mathbb{C}$ un nombre complexe fixé.
   (a) Ecrire les développements en série entière de la variable réelle x des fonctions $x \mapsto \exp(-zx)$ et $x \mapsto \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$. On précisera les rayons de convergence des séries entières obtenues.

   D'après les résultats sur la série entière exponentielle,

   $$\exp(-zx) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^n}{n!} x^n \quad \text{et} \quad \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!} x^{2n}$$

   avec dans les deux cas un rayon de convergence infini.

(b) En effectuant un produit, à l'aide de la question précédente, montrer que l'on peut écrire, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F(x,z) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n(z) x^n$$

où A_n est une fonction polynomiale de degré n.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction polynomiale H_n par $H_n = (-1)^n n! A_n$.

Donner les expressions de $H_0(z)$ et de $H_1(z)$ en fonction de z.

On note $\exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right) = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} b_p x^p$ avec $b_{2p+1} = 0$. Par produit de Cauchy

$$F(x,z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k z^k}{k!} b_{n-k} \right) x^n$$

D'où $H_0(z) = A_0(z) = b_0 = 1$ et $H_1(z) = -A_1(z) = -(b_1 - b_0 z) = z$.

(c) Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto F(x,z)$ à l'aide de F.

En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \mathbb{C}$ on a $H_{n+2}(z) = zH_{n+1}(z) - (n+1)H_n(z)$.

Donner les expressions de $H_2(z), H_3(z)$ et $H_4(z)$ en fonction de z.

On a

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,z) = -(z+x)F(x,z)$$

Or une série entière est dérivable à l'intérieur de son disque de convergence, d'où

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) A_{n+1}(z) x^n = -(z+x)F(x)$$

et donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) A_{n+1}(z) x^n = -\sum_{n=0}^{+\infty} z A_n(z) x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} A_n(z) x^{n+1}$$

soit

$$A_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) A_{n+1}(z) x^n = -zA_0 - \sum_{n=1}^{+\infty} z A_n(z) x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} A_{n-1}(z) x^n.$$

Finalement

$$(n+1)A_{n+1} = -zA_n - A_{n-1} \quad \text{et} \quad (-1)^{n+1} \frac{H_{n+1}}{n!} = -z(-1)^n \frac{H_n}{n!} - (-1)^{n-1} n \frac{H_{n-1}}{n!}.$$

d'où en changeant n en $n+1$ et en simplifiant les signes

$$H_{n+2} = zH_{n+1} - (n+1)H_n.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} H_2(z) &= zH_1(z) + H_0(z) = z^2 + 1, \\ H_3(z) &= zH_2(z) + 2H_1(z) = z^3 + 3z, \\ H_4(z) &= zH_3(z) + 3H_2(z) = z^4 + 6z^2 + 3. \end{aligned}$$

2. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f''(x) + xf'(x) + f(x) = 0$.
En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\frac{d^{n+2}f}{dx^{n+2}}(x) + x\frac{d^{n+1}f}{dx^{n+1}}(x) + (n+1)\frac{d^n f}{dx^n}(x) = 0.$$

On a $f'(x) = -x\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ et $f''(x) = -\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) + x^2\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$. Sans faire appel au raisonnement par récurrence, on peut dériver la relation n fois et on obtient l'équation à tout ordre n. Sinon la récurrence est immédiate en dérivant l'hypothèse de récurrence.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $K_n = \frac{(-1)^n}{f}\left(\frac{d^n f}{dx^n}\right)$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$ on a $K_{n+2}(x) - xK_{n+1}(x) + (n+1)K_n(x) = 0$.
Exprimer $K_0(x)$ et $K_1(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En déduire que $H_n = K_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Puisque f ne s'annule pas, on peut diviser par f. Puis on a une relation de récurrence immédiate avec la question précédente. De plus

$$K_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad K_1(x) = -\frac{-xf(x)}{f(x)} = x.$$

On a une récurrence linéaire, donc K_n est un polynôme sur $\mathbb{R}$ de degré n qui suit la même relation de récurrence que H_n sur $\mathbb{C}$. On conclut avec le fait que deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$ qui coincident sur $\mathbb{R}$ sont égaux.

3. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$ on a $H'_{n+1}(x) = (n+1)H_n(x)$.
On utilise $f'(x) = -xf(x)$. Alors en dérivant $K_{n+1} = H_{n+1}$:

$$K'_{n+1}(x) = -K_{n+2}(x) - \frac{f'(x)}{f(x)}K_{n+1}(x) = -K_{n+2}(x) + xK_{n+1}(x) = (n+1)K_n(x).$$

(b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$ on a $H''_n(x) - xH'_n(x) + nH_n(x) = 0$.
Pour $n \geq 2$, on a $H'_n(x) = nH_{n-1}(x)$ et $H''_n(x) = n(n-1)H_{n-2}(x)$. Donc

$$H''_n(x) - xH'_n(x) + nH_n(x) = n((n-1)H_{n-2}(x) - xH_{n-1}(x) + H_n(x)) = 0.$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit la fonction φ_n de la variable réelle x par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_n(x) = (-1)^n H_n(x)\exp\left(-\frac{x^2}{4}\right).$$

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\varphi''_n(x) - \frac{x^2}{4}\varphi_n(x) = \lambda_n\varphi_n(x)$, où λ_n est un nombre réel que l'on déterminera.

On dérive un produit deux fois d'où

$$
\begin{aligned}
\varphi_n''(x) &= (-1)^n \left(H_n''(x) \exp\left(-\frac{x^2}{4}\right) - 2H_n'(x)\frac{x}{2}\exp\left(-\frac{x^2}{4}\right) + H_n(x)\left(-\frac{1}{2}+\frac{x^2}{4}\right)\exp\left(-\frac{x^2}{4}\right)\right) \\
&= (-1)^n \exp\left(-\frac{x^2}{4}\right)\left(H_n''(x) - xH_n'(x) - \frac{1}{2}H_n(x)\right) + \frac{x^2}{4}\varphi_n(x) \\
&= (-1)^n \exp\left(-\frac{x^2}{4}\right) H_n(x)\left(-n-\frac{1}{2}\right) + \frac{x^2}{4}\varphi_n(x).
\end{aligned}
$$

D'où $\varphi_n''(x) - \frac{x^2}{4}\varphi_n(x) = -\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi_n(x)$ et $\lambda_n = -\left(n+\frac{1}{2}\right)$.

5. Pour tout couple $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ on pose :

$$I_{p,q} = I_{q,p} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_p(x)\varphi_q(x)\mathrm{d}x = (-1)^{p+q}\int_{-\infty}^{+\infty} H_p(x)H_q(x)f(x)\mathrm{d}x.$$

   (a) Montrer que l'intégrale $I_{p,q}$ est bien définie pour tout couple $(p,q) \in \mathbb{N}^2$. On admettra désormais que $I_{0,0} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}$.
   La définition est cohérente par symétrie. H_p et H_q sont des polynômes donc il y a bien intégrabilité de la fonction $\varphi_p\varphi_q$ sur $\mathbb{R}$ grâce à la gaussienne $f(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$.

   (b) Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$I_{p+1,q+1} = (p+1)I_{p,q} = (q+1)I_{p,q}.$$

   En déduire la valeur de $I_{p,q}$ pour tout couple $(p,q) \in \mathbb{N}^2$. On distinguera les cas $q \neq p$ et $q = p$.
   Avec des limites nulles à l'infini, on peut faire les intégrations par parties suivantes :

$$
\begin{aligned}
(p+1)(q+1)I_{p,q} &= (p+1)(q+1)(-1)^{p+q}\int_{-\infty}^{+\infty} H_p(x)H_q(x)f(x)\mathrm{d}x \\
&= (-1)^{p+q}\int_{-\infty}^{+\infty} H_{p+1}'(x)H_{q+1}'(x)f(x)\mathrm{d}x \\
&= (-1)^{p+q+1}\int_{-\infty}^{+\infty} H_{p+1}(x)(H_{q+1}'(x)f(x))'\mathrm{d}x \\
&= (-1)^{p+q+1}\int_{-\infty}^{+\infty} H_{p+1}(x)(H_{q+1}''(x)f(x) + H_{q+1}'(x)f'(x))\mathrm{d}x \\
&= (-1)^{p+q+1}\int_{-\infty}^{+\infty} H_{p+1}(x)f(x)(H_{q+1}''(x) - xH_{q+1}'(x))\mathrm{d}x \\
&= (-1)^{p+q+2}\int_{-\infty}^{+\infty} H_{p+1}(x)f(x)(q+1)H_{q+1}(x)\mathrm{d}x \\
&= (q+1)I_{p+1,q+1}
\end{aligned}
$$

ainsi $(p+1)I_{p,q} = I_{p+1,q+1} = I_{q+1,p+1} = (q+1)I_{q,p} = (q+1)I_{p,q}$.
Si $p = q$, on trouve $I_{p+1,p+1} = (p+1)I_{p,p} = (p+1)!\ I_{0,0}$ par récurrence immédiate.
Si $p \neq q$, alors $(p+1)I_{p,q} = (q+1)I_{p,q}$ donc $I_{p,q}(p-q) = 0$ ce qui impose $I_{p,q} = 0$.

Partie 2 Soit $\hat{f}$ la fonction de la variable réelle ν définie par :

$$\hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t, 2i\pi\nu)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-2i\pi\nu t - \frac{t^2}{2}\right)\mathrm{d}t$$

1. Montrer que $\hat{f}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
   On utilise le théorème de continuité des intégrales à paramètres. Ici la domination est assurée par la convergence de $\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$.
2. Montrer que $\hat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
   On utilise le théorème de dérivation des intégrales à paramètres. La domination est encore une fois assurée par la convergence de $\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$.
   (a) Montrer que $\hat{f}'(\nu) = -4\pi^2\nu\hat{f}(\nu)$ pour tout $\nu \in \mathbb{R}$.
   A l'aide du résultat sur la dérivation des intégrales à paramètres, on a :
   $$\hat{f}'(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} -2i\pi t\ F(t, 2i\pi\nu)\ \mathrm{d}t = 2i\pi \int_{-\infty}^{+\infty} (2i\pi\nu + (-2i\pi\nu - t))F(t, 2i\pi\nu)\ \mathrm{d}t$$
   Et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} u'(t)e^{u(t)}dt = [e^{u(t)}]_{-\infty}^{+\infty} = 0$ avec $u(t) = -2i\pi\nu t - \frac{t^2}{2}$. Donc $\hat{f}'(\nu) = -4\pi^2\nu\hat{f}(\nu)$.
   (b) Calculer $\hat{f}(0)$ et en déduire l'expression de $\hat{f}(\nu)$ en fonction de ν.
   On a $\hat{f}(0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} F(x,0)\ \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ \mathrm{d}x = I_{0,0} = \sqrt{2\pi}$. Et par résolution de l'équation différentielle,
   $$\frac{\hat{f}'(\nu)}{\hat{f}(\nu)} = -4\pi^2\nu \quad \text{donc} \quad \log(\hat{f}(\nu)) = -2\pi^2\nu^2 + C = -2\pi^2\nu^2 + \log(\sqrt{2\pi}).$$
   Il vient
   $$\hat{f}(\nu) = \sqrt{2\pi}e^{-2\pi^2\nu^2}.$$

2 Problème 2

Dans tout le problème, E et F désignent deux espaces vectoriels euclidiens chacun de dimension au moins égale à 2. Pour chacun de ces espaces, le produit scalaire de deux vecteurs x et y et la norme d'un vecteur x sont respectivement notés $(x|y)$ et $\|x\|$.

$\mathcal{L}(E,F)$ désigne l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

La matrice transposée d'une matrice A est notée ${}^{\mathbf{t}}A$.

Les candidats pourront utiliser sans le redémontrer qu'un projecteur d'un espace euclidien est un projecteur orthogonal si, et seulement si, il est symétrique.

L'objet de la première partie est de caractériser la composée de deux projections orthogonales qui commutent. La seconde partie propose une résolution approchée d'une équation linéaire n'ayant pas de solution en introduisant la notion de *pseudo-solution*.

Partie I

I.1 Soient x et y deux vecteurs de E, $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E, X et Y les matrices respectives de x et y dans la base $\mathcal{B}$.

Montrer que $(x|y) = {}^{\mathbf{t}}XY = {}^{\mathbf{t}}YX$.

La base $\mathcal{B}$ étant orthonormale, on sait par le cours que $(x|y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i$, où $n = \dim E$ et où les x_i et les y_i sont les coordonnées de x et y dans la base $\mathcal{B}$. Sous forme matricielle, cela s'écrit $(x|y) = {}^{\mathbf{t}}XY = {}^{\mathbf{t}}YX$.

I.2 Soit H un sous-espace vectoriel de F tel que $1 \leqslant \dim H < \dim F$. Soit $(e_1, e_2, ..., e_k)$ une base orthonormale de H et p le projecteur orthogonal de F sur H.

a) Pour tout $z \in F$, exprimer (sans justification) $p(z)$ dans la base $(e_1, e_2, \ldots, e_k)$.

D'après le cours, $p(z) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} (e_i \mid z)\, e_i$.

b) Soit $\mathcal{C}$ une base orthonormale de F. Relativement à cette base $\mathcal{C}$, on note Z la matrice d'un vecteur de $z \in F$, $M(p)$ la matrice de p et pour tout $i \in \{1, 2, ..., k\}$, E_i la matrice de e_i.

i) Montrer que pour tout $z \in F$, $M(p)Z = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} E_i \, {}^{\mathbf{t}}E_i Z$.

Sous forme matricielle, l'égalité du a) devient $M(p)Z = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} {}^{\mathbf{t}}E_i Z E_i$, mais ${}^{\mathbf{t}}E_i Z$ peut-être vu aussi bien comme un scalaire que comme une matrice de taille (1,1), ce qui permet d'écrire ${}^{\mathbf{t}}E_i Z E_i = E_i \, {}^{\mathbf{t}}E_i Z$, d'où le résultat.

ii) En déduire $M(p) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} E_i \, {}^{\mathbf{t}}E_i$.

La relation précédente étant valable pour tout Z, cela signifie précisément que $M(p) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} E_i \, {}^{\mathbf{t}}E_i$.

c) Montrer que pour tout $z \in F$, $\|p(z)\| \leqslant \|z\|$.

Par définition de p, les vecteurs $p(z)$ et $z - p(z)$ sont orthogonaux, donc $\|z\|^2 = \|p(z)\|^2 + \|z - p(z)\|^2 \geq \|p(z)\|^2$.

I.3 Exemple : On note M la matrice définie par $M = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Montrer que M est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$, muni du produit scalaire usuel, d'un projecteur orthogonal de $\mathbb{R}^4$.

Posons $e_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1,0)$ et $e_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,-1)$. Soient E_1 et E_2 les matrices de e_1 et e_2 dans la base canonique.

Les vecteurs e_1 et e_2 sont unitaires et orthogonaux et on vérifie immédiatement que $M = E_1\,{}^{\mathbf{t}}E_1 + E_2\,{}^{\mathbf{t}}E_2$. On en déduit d'après I.2., que M est la matrice dans la base canonique du projecteur orthogonal p sur $\mathrm{Vect}(e_1, e_2)$.

b) Donner une base orthonormale du noyau et une base orthonormale de l'image de ce projecteur.

On sait déjà que (e_1, e_2) est une base orthonormale de $\mathrm{Im}(p)$. Posons $e_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1,0)$ et $e_4 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,1)$. Il est immédiat que (e_3, e_4) est une base orthonormale de $(\mathrm{Im}(p))^{\perp}$, c'est-à-dire de $\mathrm{Ker}(p)$.

I.4 Soit K un second sous-espace vectoriel de F, r le projecteur orthogonal de F sur K, λ une valeur propre non nulle de $p \circ r$ et u un vecteur propre associé.

a) Montrer que u est élément de H et que $r(u) - \lambda u$ est élément de $H^{\perp}$.

$u = \dfrac{1}{\lambda} p(r(u)) \in \mathrm{Im}(p) = H$, d'où $p(r(u) - \lambda u) = (p \circ r)(u) - \lambda p(u) = \lambda u - \lambda u = 0$, donc $r(u) - \lambda u \in H^{\perp}$.

b) Établir l'égalité : $\lambda \|u\|^2 = \|r(u)\|^2$.

Selon I.4.a), $0 = (u \mid r(u) - \lambda u) = (u \mid r(u)) - \lambda \|u\|^2$. Mais $r(u) \in K$ et $u - r(u) \in K^{\perp}$ donc $(u \mid r(u)) = (r(u) \mid r(u)) = \|r(u)\|^2$, donc $\|r(u)\|^2 = \lambda \|u\|^2$.

c) En déduire que toutes les valeurs propres de $p \circ r$ sont dans le segment $[0, 1]$.

Compte tenu du I.2.c), I.4.b) montre que les valeurs propres non nulles de $p \circ r$ sont dans $]0, 1]$, d'où le résultat en incluant la possible valeur propre 0.

I.5 On suppose dans cette question que p et r commutent.

a) Montrer que $p \circ r$ est un projecteur orthogonal.

D'une part, $(p \circ r)^2 = p \circ r \circ p \circ r = p \circ p \circ r \circ r = p \circ r$; d'autre part, p et r étant symétriques, pour $(x, y) \in F^2$:

$$((p \circ r)(x)|y) = (r(x)|p(y)) = (x|(r \circ p)(y)) = (x|(p \circ r)(y))$$

Ainsi, $p \circ r$ est un projecteur symétrique, c'est-à-dire un projecteur orthogonal.

b) Dans le cas où $p \circ r$ est non nul, déterminer son spectre.

Par orthogonalité $\mathrm{Sp}(p \circ r) \subset \{0, 1\}$. Et puisque $p \circ r$ est un projecteur non nul distinct de Id_F ($\mathrm{Im}(p \circ r) \subset \mathrm{Im}\, p = H \subsetneq F$), on a $\mathrm{Sp}(p \circ r) = \{0, 1\}$.

c) Montrer que : $\mathrm{Ker}(p \circ r) = \mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Ker}(r)$ et $\mathrm{Im}(p \circ r) = \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(r)$.

$\mathrm{Ker}(p \circ r) = \mathrm{Ker}(r \circ p)$ contient $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Ker}(r)$, donc contient aussi $\mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Ker}(r)$.

Si $v \in \mathrm{Ker}(p \circ r)$, alors $r(v) \in \mathrm{Ker}(p)$ et $v - r(v) \in \mathrm{Ker}(r)$, donc $v \in \mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Ker}(r)$.

$\mathrm{Im}(p \circ r) = \mathrm{Im}(r \circ p)$ est inclus dans $\mathrm{Im}(p)$ et dans $\mathrm{Im}(r)$ donc aussi dans $\mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(r)$.

Si $v \in \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(r)$, alors il existe w tel que $v = p(w)$ et $p(v) = p(p(w)) = p(w) = v$.

Ainsi $v = p(v)$ et symétriquement $v = r(v)$ d'où $p(r(v)) = v$, donc $v \in \mathrm{Im}(p \circ r)$.

I.6 On pose $m = \dim F$ et on choisit une base orthonormale de F telle que les matrices de p et r dans cette base soient respectivement les matrices décomposées en blocs :

$P = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $R = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ où I_k est la matrice unité d'ordre k, A une matrice carrée d'ordre k et D une matrice carrée d'ordre $m-k$.

a) Montrer que les matrices vérifient les relations :

$A^2 + BC = A, \quad AB + BD = B, \quad CB + D^2 = D, \quad {}^{\mathbf{t}}A = A, \quad {}^{\mathbf{t}}B = C \quad \text{et} \quad {}^{\mathbf{t}}D = D.$

Un calcul par blocs donne $R^2 = \begin{pmatrix} A^2 + BC & AB + BD \\ CA + DC & CB + D^2 \end{pmatrix}$ et ${}^{\mathbf{t}}R = \begin{pmatrix} {}^{\mathbf{t}}A & {}^{\mathbf{t}}C \\ {}^{\mathbf{t}}B & {}^{\mathbf{t}}D \end{pmatrix}$.

Mais $R^2 = R$ car r est un projecteur et ${}^{\mathbf{t}}R = R$ car r est autoadjoint et la base considérée est orthonormale. L'identification des blocs donne alors les six égalités demandées.

b) Montrer que les quatre conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Le spectre de $p \circ r$ est inclus dans $\{0, 1\}$.

(ii) ${}^{\mathbf{t}}CC = 0$.

(iii) $C = 0$.

(iv) p et r commutent.

Deux multiplications par blocs donnent $PR = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $RP = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix}$.

i)$\Rightarrow$ ii) : A est symétrique d'après a), donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$; de plus l'expression de PR montre que le spectre de A est inclus dans le spectre réel de PR, qui est le spectre de $p \circ r$, et est donc inclus dans $\{0, 1\}$.

Il en résulte que $A^2 = A$ puis, d'après les égalités du I.6.a), que $BC = {}^{\mathbf{t}}CC = 0$.

ii)$\Rightarrow$ iii) : la somme des carrés des coefficients de C est la trace de ${}^{\mathbf{t}}CC$ qui est nulle, donc $C = 0$.

iii)$\Rightarrow$ iv) : D'après I.6.a), $B = {}^{\mathbf{t}}C = 0$. L'écriture de PR et RP montre que p et r commutent.

iv)$\Rightarrow$ i) : a été vu au I.5.b).

Partie II

Dans cette partie, sont donnés un élément f de $\mathcal{L}(E, F)$ et un élément v de F.

II.1 En considérant la projection orthogonale de v sur l'image de f, montrer qu'il existe un élément x_0 de E tel que :

$$\|f(x_0) - v\| = \min_{x \in E} \|f(x) - v\|$$

Dans la suite x_0 sera appelée une pseudo-solution de l'équation :

$$f(x) = v \tag{1}$$

$f(x)$ décrit $\mathrm{Im}(f)$ quand x décrit E et on sait que le vecteur de $\mathrm{Im}(f)$ le plus proche de v est le projeté orthogonal v' de v sur $\mathrm{Im}(f)$; les vecteurs x_0 satisfaisant à l'égalité demandée sont donc exactement les antécédents de v' par f.

II.2 Montrer que si f est injective, alors l'équation (1) admet une pseudo-solution unique.

Avec la notation du II.1., lorsque f est injective, v' n'a qu'un antécédent, d'où le résultat.

II.3 Montrer que x_0 est pseudo-solution de l'équation (1) si, et seulement si, pour tout x appartenant à E : $(f(x) | f(x_0) - v) = 0$.

x_0 est pseudo-solution de (1) si et seulement si $f(x_0) = v'$, ce qui équivaut à $v - f(x_0) \in (\mathrm{Im}(f))^\perp$ ou encore à : $\forall x \in E$, $(f(x) | f(x_0) - v) = 0$.

II.4 Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux bases orthonormales de E et F respectivement. On appelle A la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, V la matrice de v dans $\mathcal{C}$ et X_0 celle de x_0 dans $\mathcal{B}$.

Écrire sous forme matricielle l'équation $(f(x)|f(x_0)-v)=0$ et en déduire que x_0 est pseudo-solution de l'équation (1) si, et seulement si, :

$$ {}^{\mathsf{t}}AAX_0 = {}^{\mathsf{t}}AV $$

$(f(x)|f(x_0)-v)=0$ s'écrit ${}^{\mathsf{t}}(AX)(AX_0-V)=0$, ou encore ${}^{\mathsf{t}}X\,{}^{\mathsf{t}}AAX_0 = {}^{\mathsf{t}}X\,{}^{\mathsf{t}}AV$. Cette égalité est vérifiée pour tout $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (où $n=\dim E$) si et seulement si ${}^{\mathsf{t}}AAX_0 = {}^{\mathsf{t}}AV$.

II.5 Exemple : Dans cette question, on prend $E=F=\mathbb{R}^3$ munis du produit scalaire usuel. Relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$, les matrices de f et v sont respectivement :

$A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&1&-1\\-1&2&1\end{pmatrix}$ et $V=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$. Déterminer les pseudo-solutions de l'équation $f(x)=v$.

On calcule ${}^{\mathsf{t}}AA=\begin{pmatrix}3&0&-3\\0&6&0\\-3&0&3\end{pmatrix}$ et ${}^{\mathsf{t}}AV=\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}$. La résolution du système ${}^{\mathsf{t}}AAX={}^{\mathsf{t}}AV$ donne les pseudo-solutions cherchées : $x=(a,1/2,a)$, pour a réel quelconque.

II.6 Application : n désignant un entier supérieur ou égal à deux, on considère trois éléments $a=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$, $b=(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ et $c=(c_1,c_2,\ldots,c_n)$ de $\mathbb{R}^n$ et on souhaite trouver deux réels λ et μ tels que la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(\lambda a_k+\mu b_k-c_k)^2$ soit minimale.

a) Montrer que ce problème équivaut à la recherche des pseudo-solutions d'une équation $f(x)=v$ où f est un élément de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^n)$ et $v\in\mathbb{R}^n$. Préciser le vecteur v et donner la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^n$.

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(\lambda a_k+\mu b_k-c_k)^2=\|\lambda a+\mu b-c\|^2=\|f(\lambda,\mu)-c\|^2$, où $f\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^n)$ est définie par $f(\lambda,\mu)=\lambda a+\mu b$.

Le problème posé équivaut donc à la recherche des pseudo-solutions de l'équation $(*)$: $f(x)=c$.

La matrice A de f dans les bases canoniques est $\begin{pmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\\\vdots&\vdots\\a_n&b_n\end{pmatrix}$.

b) Comment doit-on choisir a et b pour que l'application f soit injective ?

f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f)=\{0\}$, c'est-à-dire si et seulement si (a,b) est une famille libre.

c) Lorsque cette dernière condition est réalisée, donner la solution du problème posé en exprimant λ et μ à l'aide de produits scalaires dans $\mathbb{R}^n$.

On calcule ${}^{\mathsf{t}}AA=\begin{pmatrix}\|a\|^2&(a\mid b)\\(a\mid b)&\|b\|^2\end{pmatrix}$ et ${}^{\mathsf{t}}AV=\begin{pmatrix}(a\mid c)\\(b\mid c)\end{pmatrix}$.

La résolution du système de Cramer $\begin{pmatrix}\|a\|^2&(a\mid b)\\(a\mid b)&\|b\|^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda\\\mu\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(a\mid c)\\(b\mid c)\end{pmatrix}$ conduit à la solution :

$$\lambda=\frac{\|b\|^2\,(a\mid c)-(a\mid b)(b\mid c)}{\|a\|^2\|b\|^2-(a\mid b)^2}\qquad\text{et}\qquad \mu=\frac{\|a\|^2\,(b\mid c)-(a\mid b)(a\mid c)}{\|a\|^2\|b\|^2-(a\mid b)^2}.$$

AVRIL 2017

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CORRIGÉ DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Exercice n° 1

Soit la fonction numérique *f* définie par : $f(x)=\dfrac{1}{(e^x+1)(e^{-x}+1)}$

1. Calculer $I=\int_0^1 f(x)\,dx$

$$I=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_1^e \frac{1}{(1+t)^2}\,dt=\left[-\frac{1}{t+1}\right]_1^e=\frac{1}{2}-\frac{1}{1+e} \text{ (en posant } t=e^x\text{)}$$

2. Étudier la convergence de l'intégrale $J=\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$

En $+\infty$: $f(x)=\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}\approx\dfrac{1}{e^x}$ qui est convergente car, par exemple, $\underset{+\infty}{Lim}\,(x^2.\dfrac{1}{e^x})=0$. On peut aussi calculer directement J = ½.

3. Étudier les variations et tracer le graphe de la fonction *f*.
La fonction est paire (graphe symétrique par rapport à l'axe verticale) et sa dérivée est égale à : $f'(x)=\dfrac{e^{-x}-e^x}{(1+e^x)^2(1+e^{-x})^2}$ qui s'annule pour *x*=0 et est négative. La fonction est décroissante de $[0,+\infty[$ sur $[1/4,0[$.

Exercice n° 2

On note $M_n(R)$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre *n* à coefficients réels.

1. L'ensemble des matrices carrées orthogonales d'ordre *n* à coefficients réels est-il un ensemble convexe de $M_n(R)$?

$I_n,-I_n\in M_n(R)$ mais $\frac{1}{2}I_n+\frac{1}{2}(-I_n)=0\notin M_n(R)$. L'ensemble n'est donc pas convexe.

2. L'ensemble des matrices carrées diagonalisables d'ordre *n* à coefficients réels est-il un ensemble convexe de $M_n(R)$?

Soient $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&2\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}2&1\\0&0\end{pmatrix}$ deux matrices diagonalisables (deux valeurs propres réelles distinctes). Par contre, $M=\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable.

3. Soit $E=\left\{A=(a_{ij})\in M_n(R)/\ \forall i,j\ a_{ij}\ \geq 0;\ \forall i,\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}=1\right\}$. Cet ensemble est-il convexe ?

Montrons que E est convexe.

Soient $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$ et $\lambda\in[0,1]$. On a : $\lambda A+(1-\lambda)B=(\lambda a_{ij}+(1-\lambda)b_{ij})=(c_{ij})$

Comme $a_{ij}\geq 0,\ b_{ij}\geq 0$, alors $c_{ij}\geq 0$,

$\forall i,\ \sum_j c_{ij}=\lambda\sum_j a_{ij}+(1-\lambda)\sum_j b_{ij}=\lambda+(1-\lambda)=1$

Exercice n° 3

Pour n entier naturel non nul, on dit que la suite de matrices $A_n=\begin{pmatrix}u_n&v_n\\w_n&t_n\end{pmatrix}$ converge vers la matrice $A=\begin{pmatrix}u&v\\w&t\end{pmatrix}$ si et seulement si $u_n\to u, v_n\to v, w_n\to w, t_n\to t$

Soit $A_n=\begin{pmatrix}1&-\frac{a}{n}\\\frac{a}{n}&1\end{pmatrix}^n$, où a un nombre réel donné strictement positif.

Déterminer $\underset{n\to\infty}{Lim}A_n$ (on pourra mettre en évidence l'expression : $\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}$)

$$B_n=\begin{pmatrix}1&-\frac{a}{n}\\\frac{a}{n}&1\end{pmatrix}=\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}}&\frac{-a/n}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}}\\\frac{a/n}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}}&\frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}}\end{pmatrix}$$

On peut remarquer que : $\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}}\right)^2+\left(\frac{a/n}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}}\right)^2=1$, puis poser

$\cos\theta_n=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}}$; $\sin\theta_n=\frac{a/n}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}}$ avec $-\pi<\theta_n<\pi$, soit $\theta_n=Arctg\,(\frac{a}{n})$.

D'où $A_n = \left(\sqrt{1+\dfrac{a^2}{n^2}}\right)^n \begin{pmatrix} \cos\theta_n & -\sin\theta_n \\ \sin\theta_n & \cos\theta_n \end{pmatrix}^n = \left(1+\dfrac{a^2}{n^2}\right)^{n/2} \begin{pmatrix} \cos n\theta_n & -\sin n\theta_n \\ \sin n\theta_n & \cos n\theta_n \end{pmatrix}$

puis $\left(1+\dfrac{a^2}{n^2}\right)^{n/2} = e^{\frac{n}{2} Ln\,(1+a^2/n^2)} \approx e^{a^2/2n} \approx 1$.

Par ailleurs $n\,\theta_n = n\,Arctg\,\dfrac{a}{n} \approx n\dfrac{a}{n} = a$.

En conclusion $\underset{n\to\infty}{Lim}\, A_n = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}$.

Exercice n° 4

1. Calculer $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^3}\,dt$

On a : $1+t^3 = (1+t)(t^2-t+1)$ et $\dfrac{1}{1+t^3} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{1+t} + \dfrac{-t+2}{t^2-t+1}\right)$.

Par conséquent : $I = \dfrac{1}{3} Ln(2) + \dfrac{1}{3} J$, où $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{-t+2}{t^2-t+1}\,dt$.

Cette dernière intégrale peut s'écrire :

$$J = \int_0^1 \frac{-t+2}{t^2-t+1}\,dt = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 \frac{-2t+1}{t^2-t+1}\,dt + \int_0^1 \frac{3}{t^2-t+1}\,dt\right) = \frac{1}{2}\Big[-Ln(t^2-t+1)\Big]_0^1 + \frac{3}{2}\int_0^1 \frac{1}{(t-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dt$$

$$J = 0 + \frac{3}{2}\times\frac{2}{\sqrt{3}}\left[Arctg\left((t-\frac{1}{2})\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1 = \sqrt{3}\times\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$. En conclusion $I = \dfrac{1}{3} Ln(2) + \dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$

2. On considère la fonction *f* définie sur *R* par : $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t x^2}}{1+t^3}\,dt$

Étudier l'existence de *f* et calculer $f(0)$

En $+\infty$, $\underset{n\to\infty}{Lim}\, t^2 \dfrac{e^{-tx^2}}{(1+t^3)} = 0$, donc l'intégrale est convergente.

On effectue le changement de variable $t = 1/u$ pour obtenir :

$$f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^3} dt = \int_0^{+\infty} \frac{u}{1+u^3} du = \int_0^{+\infty} \frac{u+1}{1+u^3} du - \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^3} du = \int_0^{+\infty} \frac{1}{u^2 - u + 1} du - f(0)$$, d'où

$$2 f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{u^2 - u + 1} du = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(u - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} du = \frac{2}{\sqrt{3}} \left[Arctg(t - \frac{1}{2}) \frac{2}{\sqrt{3}} \right]_0^{+\infty} = \frac{2}{\sqrt{3}} (\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}) = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$$

Soit $f(0) = \dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

3. Étudier les variations de *f* et déterminer sa limite en $+\infty$.

La fonction est paire. Pour $0 \le x \le x'$, on a : $e^{-tx^2} \ge e^{-tx'^2}$ pour toutes valeurs de *t* positives. Par conséquent la fonction *f* est décroissante sur R^+. Comme l'intégrale est convergente, on a : $\lim_{+\infty} f(x) = 0$

Exercice n° 5

1. Soient A une matrice carrée d'ordre *n* à coefficients réels et P un polynôme d'une variable réelle. Montrer que si λ est une valeur propre de A, alors $P(\lambda)$ est une valeur propre de $P(A)$.

On a : $Ax = \lambda x$, puis $A^k x = \lambda^k x$. Posons $P(X) = \sum_{j=0}^{q} a_j X^j$, on obtient :

$$P(A) = \sum_{j=0}^{q} a_j A^j \text{ et } P(A)(x) = \sum_{j=0}^{q} a_j A^j x = \sum_{j=0}^{q} a_j \lambda^j x = (\sum_{j=0}^{q} a_j \lambda^j) x = P(\lambda) x$$

2. Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs propres de *M*.

On a $\det(M - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 4 \\ 3 & -4-\lambda & 12 \\ 1 & -2 & 5-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda = -\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)$ et 0, 1, 2 sont les valeurs propres.

3. Trouver un polynôme *P* du second degré tel que la matrice $P(M)$ admette (-1) pour valeur propre double et 3 pour valeur simple. On explicitera $P(M)$.
Posons $P(X) = aX^2 + bX + c$. On peut choisir $P(0) = P(1) = -1$ et $P(2) = 3$.
On obtient : $c = -1; a + b = 0; 4a + 2b = 4.$ On obtient : $P(X) = 2X^2 - 2X - 1$ et

$$P(M)=2M^2-2M-I=\begin{pmatrix}11 & -16 & 48\\ 6 & -9 & 24\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

4. Déterminer la matrice M_1 de la projection orthogonale (dans la base canonique) sur le sous-espace vectoriel propre associé à la valeur propre 1 de la matrice *M*.

Cherchons d'abord ce sous-espace vectoriel qui doit vérifier : $Mu=u$, à savoir : $y=0;\ x+4z=0$. Le vecteur $u=(4,0,-1)$ engendre la droite vectorielle.

La matrice M_1 de la projection orthogonale s'écrit $M_1=B(B^{'}B)^{-1}B^{'}$ où $B=\begin{pmatrix}4\\0\\-1\end{pmatrix}$.

On obtient : $M_1=\dfrac{1}{17}\begin{pmatrix}4\\0\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 0 & -1\end{pmatrix}=\dfrac{1}{17}\begin{pmatrix}16 & 0 & -4\\ 0 & 0 & 0\\ -4 & 0 & 1\end{pmatrix}$

5. Déterminer la matrice M_2 de la projection orthogonale (dans la base canonique) sur le plan vectoriel propre associé aux valeurs propres 0 et 2 de la matrice *M*.

La matrice M_2 de la projection orthogonale sur le plan engendré par les vecteurs propres associés aux valeurs propres 0 et 2 vérifie la propriété demandée.
Le sous-espace vectoriel propre associé à la valeur propre 0 est engendré par : (-4, 3, 2)
Le sous-espace vectoriel propre associé à la valeur propre 2 est engendré par : (2, 1, 0)

La matrice M_2 de la projection orthogonale s'écrit $M_2=C(C^{'}C)^{-1}C^{'}$ où $C=\begin{pmatrix}-4 & 2\\ 3 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$.

On obtient : $M_2=\dfrac{1}{120}\begin{pmatrix}-4 & 2\\ 3 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 5\\ 5 & 29\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4 & 3 & 2\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}=\dfrac{1}{60}\begin{pmatrix}58 & 24 & -10\\ 4 & 37 & 20\\ -5 & 5 & 5\end{pmatrix}$

6. Donner un exemple de matrice *M* telle que $M_1M_2=M_2M_1=0$?
Pour toute matrice *M* symétrique ayant 3 valeurs propres réelles distinctes, les droites vectorielles propres associées aux valeurs propres sont orthogonales et la relation est vérifiée.

Par exemple, on pourrait prendre $M=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$

Exercice n° 6

On considère dans l'espace vectoriel R^3 les deux sous-ensembles

$E_1=\left\{(n,n^2,n^3)\ /\ n=0,1,2.....\right\}$ et $E_2=\left\{(n+1,2n\ \ +1,3n+1)\ /\ n=0,1,2.....\right\}$

Soit V_1 (respectivement V_2) le sous-espace vectoriel de R^3 engendré par E_1 (respectivement E_2)

1. Déterminer la dimension de V_1, puis de V_2.

Les vecteurs (1, 1, 1) ; (2, 4, 8) et (3, 9, 27) sont dans E_1, donc dans V_1 . Ces trois vecteurs sont indépendants car $\det\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 4 & 9\\ 1 & 8 & 27\end{pmatrix}=12\neq 0$. Et comme la dimension de V_1 est bornée par celle de R^3, on a : $\dim V_1=3$.

On remarque que : $3n+1=2(2n+1)-(n+1)$ et

comme $(n+1,2n+1,3n+1)=\text{n}(1,2,3)+(1,1,1)$, $\dim V_2=2$

2. Déterminer le sous-espace vectoriel V_3 orthogonal à V_2 pour la base canonique.

V_3 est une droite vectoriel engendrée par un vecteur $u=(x,y,z)$ orthogonal aux vecteurs $(1,2,3)$ et $(1,1,1)$. Plus précisément : $x+y+z=0;\ x+2y+3z=0$, ce qui implique : $x=z;\ y=2z$ et $u=(1,-2,1)$ est un vecteur directeur.

3. La matrice suivante est-elle diagonalisable $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix}$?

Il est inutile de calculer les valeurs propres, car cette matrice correspond aux sous-espaces V_2 et V_3. Par conséquent la matrice admet trois valeurs propres distinctes et elle est diagonalisable.

Exercice n° 7

1. Pour $\varepsilon\in\,]0,1[$ et n entier naturel, on pose : $I_n(\varepsilon)=\int_\varepsilon^1 x^n\,Ln\,x\,dx$, où Ln désigne le logarithme népérien. Déterminer $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} I_n(\varepsilon)$

Par intégration par parties :

$$I_n(\varepsilon)=\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}Ln\,x\right]_\varepsilon^1-\int_\varepsilon^1\frac{x^n}{n+1}dx=-\frac{\varepsilon^{n+1}}{n+1}Ln\,\varepsilon-\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{\varepsilon^{n+1}}{(n+1)^2}$$ et

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_n(\varepsilon) = -\frac{1}{(n+1)^2}$$

2. Soit f une fonction numérique définie sur $]0,1[$ par $f(x) = \dfrac{Ln\, x}{x-1}$. Étudier la convergence de l'intégrale $\int_0^1 f(x)\, dx$.

La fonction f est continue et positive sur $]0,1[$. On a : $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{t\to 0} \dfrac{Ln(1+t)}{t} = 1$, on peut donc prolonger la fonction par continuité en 1, en posant $f(1)=1$.

Au voisinage de zéro, la fonction est négligeable devant $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ (car $\lim_{x\to 0} \sqrt{x}\, f(x) = 0$ et $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ est intégrable au voisinage de 0), par conséquent l'intégrale est convergente.

3. Calculer $\int_0^1 f(x)\, dx$

On a : $\sum_{k=0}^{n} x^k = \dfrac{x^{n+1}-1}{x-1} \Rightarrow \dfrac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + \dfrac{x^{n+1}}{1-x}$, donc

$\dfrac{Ln\, x}{x-1} = -\dfrac{Ln\, x}{1-x} = -\sum_{k=0}^{n} x^k\, Ln\, x - \dfrac{x^{n+1}\, Ln\, x}{1-x}$ et $\int_0^1 \dfrac{Ln\, x}{x-1} dx = -\sum_{k=0}^{n} \int_0^1 x^k\, Ln\, x\, dx - \int_0^1 \dfrac{x^{n+1}\, Ln\, x}{1-x} dx$

On a : $\left| \int_0^1 \dfrac{x^{n+1}\, Ln\, x}{1-x} dx \right| \le \int_0^1 x^n . \left| \dfrac{x\, Ln\, x}{1-x} \right| dx \le M \int_0^1 x^n\, dx = \dfrac{M}{n+1}$, car l'application $x \to \dfrac{x\, Ln\, x}{1-x}$ est continue sur $]0,1[$ et prolongeable par continuité en 0 et 1, donc bornée par M.

Par conséquent, $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \dfrac{x^{n+1}\, Ln\, x}{1-x} dx = 0$, et la série de terme général $-\int_0^1 x^k\, Ln\, x\, dx$ converge.

D'où $\int_0^1 \dfrac{Ln\, x}{x-1} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 - x^k\, Ln\, x\, dx$ et d'après la première question

$$\int_0^1 \frac{Ln\, x}{x-1} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 - x^k\, Ln\, x\, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}$$